

Zu Beginn widmen wir uns natursprachlichen Sätzen und der ihnen zu Grunde liegenden Struktur aus Sicht der Logik. Bereits hier kann man komplexe Schlüsse betrachten, für uns ist es aber vor allem eine Voraussetzung, Sätze in eine formale logische Sprache zu bringen. Dabei kären wir gleich (noch informell) den Begriff „Wahrheit“, indem die Sätze in Bezug zu einem Modell (d.h. eine „Welt“) gesetzt werden.

1 Ein Dialog

„Was machen wir heute?“

„Ich bin für einen Zoobesuch oder Kino.“

„Zoo klingt nach langen Fußwegen, darauf habe ich keine Lust.“

„Also Kino. Wenn keine Kommödie läuft, sehen wir einen Horrorfilm.“

„Es läuft eine, aber ich will trotzdem Horror.“

„Einverstanden.“

Bereits dieser Gesprächsfetzen enthält einiges für die Logik Interessantes und wir werden einige Male auf ihn zurückkommen.

Zunächst gilt unser Blick der zweiten bis vierten Zeile. Hier wird ein logisches Schlussprinzip angewendet, dass wir später *Modus tollendo ponens* nennen werden. Charakteristisch dafür sind zwei Voraussetzungen, die *Prämissen*, die jeweils eine bestimmte Form haben müssen und die *Konklusion*, die daraus folgende Aussage. Alle zusammen bilden das *Argument* (so nennen wir von nun an den Schluss selbst).

Im Einzelnen:

Eine Prämisse ist eine Aussage, die zwei Aussagen mit einem *oder* zusammenfügt:

„Ich bin für einen Zoobesuch oder Kino.“ deuten wir als:

„Wir werden ins Kino gehen oder wir werden in den Zoo gehen.“

Die andere Prämisse ist die *Negation* einer der mit *oder* verknüpften Aussagen:

„Zoo klingt nach langen Fußwegen, darauf habe ich keine Lust.“ deuten wir als:

„Wir werden nicht in den Zoo gehen.“

Die Konklusion ergibt sich als:

„Wir werden ins Kino gehen.“ oder knapper: „Also Kino.“

Solche und andere Argumente stehen in Zukunft im Zentrum unserer Aufmerksamkeit. An diesem einfachen Beispiel sieht man bereits, dass es fast immer nötig ist, natursprachliche Aussagen zu deuten und umzuformen, um die Argumente herauszustellen. Das schließt auch implizite Annahmen über gängige Umstände ein. Nirgendwo steht geschrieben, dass sich beide Personen aus unserem kurzen Dialog wirklich auf eine Unternehmung einigen müssen oder dass nicht noch eine weitere Unternehmungsidee hinzukommt. Dagegen sind die Gleichsetzung von synonymen Ausdrücken oder die Erweiterung von Ellipsen wie „Also Kino.“ recht einfach, aber auch sie können strittig sein. Ein Weg damit umzugehen, ist die Klassifizierung von Wörtern und Wortgruppen nach ihrer logischen Funktion (ganz ähnlich wie dies gewöhnliche Grammatiken tun).

2 Termini und Aussagen

Wörter und Wortgruppen die zusammen eine Eigenschaft, „eine Tätigkeit“ (beides fassen wir unter dem Begriff *Prädikat* zusammen) oder ein *Subjekt* (z.B. Personen, aber auch Gegenstände etc.) beschreiben nennen wir *Termini*.

Beispiele: „Johanna“ beschreibt allein eine Person, ist also Subjektterminus.

„Johanna und der verstimmte Flügel“ ist ebenfalls ein Subjektterminus.

„– ist musikalisch“ ist allein ein Prädikatterminus.

„– ist musikalischer als –“ ist ebenfalls ein Prädikatterminus.

Das zweite Beispiel zeigt, dass ein Terminus mehrere Wörter enthalten kann, die man allein ebenfalls

als Termini ansehen kann. Die Funktion, die das Wort „und“ hier einnimmt, bezeichnen wir als *terminibildend*, das „und“ selbst ist *Operator*.

Prädikattermini (Bsp. 3 und 4) enthalten jeweils so genannte Leerstellen (hier gekennzeichnet durch $_$). Die Anzahl derer bezeichnen wir als Stelligkeit des Prädikatterminus und des dazugehörigen Prädikats. Durch Ausfüllen dieser Leerstellen mit jeweils einem Subjektterminus entstehen elementare *Aussagen*. Das Prädikat wird durch die Aussage dem Subjekt bzw. den Subjekten zugeschrieben (prädiziert). So schreibt „Johanna und Nikolaus sind musikalisch“ dem Subjekt repräsentiert durch den Terminus „Johanna und Nikolaus“ das durch den Terminus „ $_$ ist musikalisch“ bestimmte einstellige Prädikat zu. Um aus elementaren Aussagen komplexere zu bilden existieren ebenfalls Operatoren, sie heißen *aussagenbildend*. Solche sind z.B. „Wenn ... , dann ...“, „... und ...“, „nicht ...“ und „einige“. Die ersten drei zählen zu den *Junktoren*, die wie Prädikate auch Stelligkeit besitzen (hier werden ... als Platzhalter benutzt). Dabei fällt auf, dass „und“ sowohl termini- als auch aussagenbildend sein kann. Seine Funktion ist aber durch den Kontext klar ersichtlich.

Der vierte Operator erfüllt die Funktion eines *Quantors*. Wie der Name impliziert, geben Quantoren die Vielfachheit an, mit der bestimmten Subjektgruppen Prädikate zugeschrieben werden.

Bsp.: „Einige Menschen sind motiviert“

„Alle Katzen sind grau“

Weitere Quantoren („jegliche“, „wenige“) lassen sich in ihrer Funktion entweder dem Quantor „alle“ oder dem Quantor „es existieren“ zuordnen. („einige“ gehört z.B. zur letzten Gruppe).

Die Klassifikation von Wortgruppen innerhalb von Aussagesätzen nach ihrer Funktion ist der erste und wichtigste Schritt zum Übersetzen in eine formale Sprache, wie wir es später tun werden. Unter den Operatoren werden uns vorwiegend die aussagenbildenden interessieren, die terminibildenden untersucht die Termintheorie.

3 Modelle und das Konzept Wahrheit

„Es gibt keinen anderen Weg, wir müssen diesen nehmen.“

Sätze wie diesen hören wir nicht selten und wir haben auch kein Problem ihn zu verstehen. Allerdings nur, weil wir gewisse zusätzliche Annahmen machen. Von allen Wegen betrachtet unser Sprecher nicht die, die nach Rom führen, wenn er zum Nordpol will. Zudem ignoriert er Wasserwege, wenn ihm kein Boot zur Verfügung steht usw. Schließlich kommt er darauf, dass der einzige Weg aus seinem Haus durch die Vordertür führt, weil die Hintertür verschlossen ist. Seine Begleiterin wird ihm zustimmen, obwohl sie erst vorgestern zwei Stunden entlang eines Rundwegs im Park gejoggt ist.

Wenn wir Aussagen einen Wahrheitsgehalt zusprechen beachten wir also einen Bezugsrahmen, auf den sich diese Aussage bezieht. Dieser ist nichts anderes als ein *Modell*, also informell ausgedrückt eine Ansammlung von Annahmen über existente Subjekte und die ihnen zugeschriebenen Prädikate. Die formale mathematische Definition, die wir später treffen werden, spiegelt letztlich nur diese Eigenschaft wieder.

Noch ein Beispiel: „Alle Türme sind beweglich.“

1. Modell: Großstadt — die Aussage entspricht nicht dem Modell, sie ist *falsch*.
2. Modell: Kleinstadt ohne Turm — Alle (d.h. null) Türme sind beweglich: die Aussage ist *wahr*
3. Modell: Schachbrett in Startaufstellung — Bauern und Pferde blockieren die Türme: die Aussage ist *falsch*.
4. Modell: Schachbrett mit je 2 Türmen und beiden Königen: die Aussage ist *wahr*.

Wahrheit einer Aussage im Modell ist also das Übereinstimmen ihrer Prädikationen mit dem Zustand im Modell.