

Dieses Kapitel beinhaltet das mathematische Fundament für fast alle folgenden: eine kurze Einführung in die (naive) Mengenlehre. Als Zugang wählen wir den historischen, navien im Stile Georg Cantors, ergänzt um einige Einschränkungen und Konkretisierungen, die auf den Axiomen des heute meist verwendeten Systems ZFC basieren. Dann wenden wir uns den darauf beruhenden Konzepten von Relationen und Funktionen zu.

1 Eine naive Definition

Eine *Menge* nennen wir ein oder mehrere Objekte, die sich als Ganzes betrachten lassen.

Eine ähnliche Definition gab Georg Cantor am Ende des 19. Jahrhunderts. Auf ihrer Basis gelang es ihm eine Theorie zu entwickeln, die weit über das hinaus geht, was wir in diesem Kapitel als Grundlagen benötigen und in ihr Beweise zu führen, die heute als richtig und konsistent angesehen werden und zahlreiche Beweise in anderen Gebieten inspiriert haben. Warum also nennen wir diese Definition „naiv“ ?

Zunächst sei gesagt, dass „naiv“ nicht als dumm sondern vielmehr als natürlich, dem allgemeinen Verständnis entsprechend verstanden werden soll. Denn diese ist sowohl einfach als auch höchst intuitiv. Leider bringt sie zwei Probleme mit sich:

Das erste besteht in mehreren mathematisch kaum definierbaren Termini wie „Objekte“ oder „Ganzes“. Diese kann man zwar als vorlogisch bzw. –mathematisch definiert annehmen, jedoch verkompliziert ihre Betrachtung die entstehende Theorie.

Gravierender noch sind die durch diese Definition nicht ausgeschlossenen Paradoxien, von denen die bekannteste die Russellsche Antinomie ist: Man betrachte die Menge, die alle Mengen enthält, die sich **nicht selbst** enthalten. Dann ist jene Menge **genau dann** in sich enthalten, wenn sie sich nicht selbst enthält, was ein offensichtlicher Widerspruch ist. Cantor waren Widersprüche solcher Art vermutlich bewusst, weswegen die Definition die Bedingung der Betrachtbarkeit als Ganzes enthält. Diese kann bei der Russellschen Antinomie verneint werden. Insofern taugt Cantors Mengenbegriff als Grundlage für uns, ergänzt um die folgenden Präzisierungen.

2 Die Lösung der Russellschen Antinomie

Eine gängige Methode Paradoxien aus dem Weg zu gehen, ist ihre Verursacher „zu verbieten“ d.h. eine Definition zu wählen, die Mengen, die sich selbst enthalten, ausschließt. Tatsächlich existiert im Axiomensystem von Zermelo und Fränkel (abgekürzt ZFC) ein Axiom, das in Kombination mit den anderen dies ausschließt. Wir wollen die Axiome nicht alle kennenlernen, weswegen wir es bei folgender Bedingung belassen:

Eine Menge enthält *niemals sich selbst* als Element.

3 Extensionalität

Extensionalität wird das Prinzip genannt, das Mengen genau dann als *identisch* ansieht, wenn sie *die-selben* Elemente enthalten. Wir halten fest, dass für das Enthaltensein weder Anzahl noch Reihenfolge betrachtet werden. D.h. ein und dasselbe Objekt (z.B. ein Apfel) ist *Element* der Menge oder *nicht Element* der Menge, aber weder zweites Element noch fünffach enthalten (Nichtsdestotrotz ist eine Menge von fünf **verschiedenen** Äpfeln möglich).

Weiterhin nehmen wir die Existenz **genau einer** Menge an, die keine Elemente enthält: die *leere Menge*.

4 Definition von Mengen

Da eine Menge ausschließlich über ihre Elemente definiert ist, ist der einfachste Weg für kleine endliche Mengen, ihre Elemente aufzuzählen.

Beispiel: Die Menge mit den Elementen Herr Gutmensch, Frau Friedsam und Frau Höflich.

Die zweite Methode, von der wir oft Gebrauch machen werden, ist das Aussondern aus anderen bekannten Mengen durch bestimmte Eigenschaften.

Beispiel: Die Menge der **netten** Nachbarn.

Wie in den beiden Beispielen kann ein und dieselbe Menge auf beide Arten definiert werden (eine Definition der ersten Sorte muss nach dem Extensionalitätsprinzip für alle endlichen Mengen existieren).

5 Formales System und Symbolik

Wie angekündigt arbeiten wir nicht mit den formalen Axiomen, dennoch ist es günstig, den Charakter der formalen Mengenleere zu kennen. Ihre Axiome definieren nicht, **was** eine Menge ist (wie oben gesagt sehen wir dies als vormathematisch gegeben an). Vielmehr bestimmen sie, **wie** Mengen zueinander in Beziehung stehen (im Übrigen unterscheidet sie nicht zwischen elementaren Objekten und Mengen; alles worüber die Mengenleere spricht sind Mengen).

Den Kern bildet die Elementrelation, die wir mit dem Symbol $\in$ bezeichnen. Mengen bezeichnen wir mit einzelnen großen oder kleinen lateinischen Buchstaben. $a \in B$ wird gelesen als „a ist Element von B“. Die Verneinung der Elementbeziehung symbolisiert man so: $\notin$. Das Gleichheitszeichen $=$ nutzen wir hier für die Identität von Mengen. Die leere Menge schließlich erhält das Symbol $\emptyset$.

Nun sind wir in der Lage, die Grundannahmen von oben mit dieser Symbolik auszudrücken:

Für alle Mengen m gilt: $m \notin m$ (nicht Element seiner selbst).

Für alle Mengen M, N gilt: Wenn für alle Mengen m mit $m \in M$ auch $m \in N$ und für alle Mengen n mit $n \in N$ auch $n \in M$, so $M = N$ (Extensionalität: sind die Elemente des einen jeweils auch Elemente des andern, so sind beide identisch).

Es gibt eine Menge $\emptyset$, sodass für alle Mengen m gilt: $m \notin \emptyset$ (die leere Menge).

Um schließlich alle Elemente aufzuzählen schreibt man statt $a \in m, b \in m, c \in m$ schlicht $m = \{a, b, c\}$.

6 Mengenrelationen und -operationen

Je nachdem welche Elemente Mengen enthalten stehen sie in unterschiedlichen Beziehungen (*Relationen*) zueinander. Zunächst kann eine Menge a nur Elemente haben, die eine andere (b) ebenfalls besitzt. Dann nennen wir a eine *Teilmenge* von b ($a \subseteq b$) und *echte Teilmenge* von b ($a \subset b$), falls b Elemente besitzt, die nicht in a sind. Das jeweilige Gegenteil sind die *Obermenge* ($\supseteq$) und *echte Obermenge* ($\supset$).

Eine weitere Relation beschreibt, ob überhaupt gemeinsame Elemente existieren, falls nein so schreiben wir: $a \cap b = \emptyset$ und nennen a und b *disjunkt*.

Das Symbol $\cap$ selbst steht für die *Operation* der Schnittmengenbildung. Mit $a \cap b$ wird die Menge beschrieben, die alle Elemente enthält, die in a und b enthalten sind (im Falle disjunkter Mengen also die Menge ohne Elemente, die leere Menge). Im Gegensatz dazu steht $\cup$ für die *Vereinigung* zweier Mengen, in $a \cup b$ sind alle Elemente, die in a oder b sind, enthalten (es sei daran erinnert, sie nur **einmal** aufzuzählen). Gern als „Mengenminus“ wird die folgende Operation bezeichnet: $a \setminus b$ (lies: a ohne b) definiert die Menge, in der alle Elemente aus a enthalten sind, die sich **nicht** auch in b befinden.

Beispiele:

$$\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$$

$$\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$$

$$\{a, b, c\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset$$

$$\begin{aligned}\{a, b, c\} \cap \{a, d, c\} &= \{a, c\} \\ \{a, b, c\} \cup \{a, b, c, d\} &= \{a, b, c, d\} \\ \{a, b, c, d\} \setminus \{a, e, f, g\} &= \{b, c, d\}\end{aligned}$$

Komplement und Potenzmenge

Zwei Operationen haben eine besondere Rolle, weil sie unär sind, d.h. sie beziehen sich auf allein eine Menge statt eine Verknüpfung zweier Mengen zu beschreiben. Das *Komplement* einer Menge ist nur im Kontext eines *Universums* definiert, einer Obermenge aller im Augenblick betrachteten Mengen. Bezeichnet mit a^c für eine Menge a beschreibt es die Menge aller Elemente des Universums, die nicht in a liegen.

Beispiel: Universum $U = \{a, b, c, d, e\}$, Menge $M = \{a, b, c\}$: $M^c = \{d, e\}$

Ebenso ist die Potenzmengenoperation unär und wie ihr Name andeutet, wird hierbei „potenziert“ (im Fall endlicher Mengen, die Anzahl ihrer Elemente). Die *Potenzmenge* $\wp(a)$ einer Menge a ist die Menge aller Teilmengen von a .

Beispiel: $M = \{a, b\}$, $\wp(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Tupel und das kartesische Produkt

Sind bei Mengen Anzahl und Reihenfolge der Elemente ohne Bedeutung, so sind gerade sie entscheidend für die Definition von Tupeln. Ein *Tupel* ist eine endliche Sequenz von Elementen. Dabei spricht man je nach Anzahl n der Elemente (bei einem Tupel auch *Komponenten* genannt) eines Tupels von einem n -Tupel. Ausnahmen für $n = 2 \dots 4$ sind das *Paar*, *Tripel* und *Quadrupel*. Wir schreiben das Paar aus den Elementen a und b als (a, b) (in besonderem Kontext auch mit anderen Klammern) und analog dazu Tripel, Quadrupel und alle anderen Tupel.

Beispiele: $(a, b) \neq (b, a) \neq (b, b, a)$

Die beiden Konzepte Mengen und Tupel lassen sich gut in Kombination nutzen, indem man Tupel von Mengen, aber vor allem Mengen von Tupeln betrachtet:

Die Menge der Paare mit dem ersten Partner aus der Menge A und dem zweiten aus der Menge B nennen wir das *kartesische Produkt* von A und B , in Symbolen:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Beispiel: $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 3\}$: $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$

Das kartesische Produkt ist auf mehr als zwei Mengen erweiterbar:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

(Man beachte, dass hier $(a, b, c) = (a, (b, c))$ angenommen wird, was wir bei Mengen nie tun dürfen: $\{a, b, c\} \neq \{a, \{b, c\}\}$)

Selbstverständlich kann man das kartesische Produkt einer Menge auch mit ihr selbst bilden:

$$A \times A = \{(m, n) : m, n \in A\} = A^2$$

Das gilt auch für die Erweiterung so dass wir definieren:

$$A^n = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_n \text{ (wobei } A^1 = A)$$

7 Relationen

Wir haben bereits über Relationen zwischen Mengen gesprochen. Genauso kennt ihr bereits Relationen zwischen Zahlen (z.B. $>$, $\leq$ oder teilbar durch). In beiden Fällen haben wir Relationen als Eigenschaften bzw. Verhältnisse zwischen Objekten betrachtet. Der Ansatz, den wir nun verfolgen betrachten

Relationen (z.B. größer sein) als Tupel (z.B. alle Paare, bei denen der erste Partner größer ist als der zweite). Alle Objekte (oder Personen, Zahlen etc.), die wir durch die Relation in Beziehung setzen gehören einer Grundmenge an (wollen wir Zahlen in Beziehung setzen z.B. den Natürlichen Zahlen). Damit ist die Relation *Teilmenge des kartesischen Produkts* dieser Menge, wir definieren:

Für eine n -stellige Relation R auf einer Menge M gilt:

$$R \subseteq M^n$$

Beispiel: Die Familie Teichhuber hat vier Kinder: Angelique (17), John-Joseph(12), Karsten (10), Maria (8).

Die einstellige Relation $R_{\text{älter als 9}}$ umfasst drei Kinder:

$$R_{\text{älter als 9}} = \{\text{Angelique}, \text{John-Joseph}, \text{Karsten}\}$$

Wohingegen die zweistellige Relation $R_{\text{älter sein}}$ eine Menge aus sechs Paaren ist:

$$R_{\text{älter sein}} = \{(\text{Angelique}, \text{John-Joseph}), (\text{Angelique}, \text{Karsten}), (\text{Angelique}, \text{Maria}), (\text{John-Joseph}, \text{Karsten}), (\text{John-Joseph}, \text{Maria}), (\text{Karsten}, \text{Maria})\}$$

8 Funktionen

Das Konzept der Funktion als Abbildung sollte bekannt sein. Den Elementen einer Menge (des *Definitionsbereichs*) wird je genau ein Element einer zweiten Menge (des *Wertebereichs*) zugeordnet. Damit stehen aber je ein Element der ersten und eines der zweiten Menge wieder in einer Relation. Demzufolge lässt sich die gesamte Funktion als eine spezielle Relation betrachten:

Eine *Funktion* f von einer Menge A in eine Menge B ($f : A \rightarrow B$) ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts ($f \subset A \times B$), die für jedes a aus A nur ein Paar mit a als ersten Partner besitzt ($(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in f$ und $a_1 = a_2$ so folgt: $b_1 = b_2$, d.h. jedes Paar mit a_1 als erstem Partner hat b_1 als zweiten, d.h. es gibt nur dieses eine). Damit ist die *Eindeutigkeit* der Abbildung beschrieben.

Beispiele: $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ *rwbrace*:

$f = \{(a, 1), (b, 1)\}$ ist Funktion ($f : A \rightarrow B$).

$g = \{(a, 1), (a, 2)\}$ ist keine Funktion, weil a zwei Werte zugeordnet sind. Ist $f : A \rightarrow B$ nicht für alle a aus A definiert so heißt f *partiell* sonst *total*.

Injektion, Surjektion und Bijektion

Im Hinblick auf den Wertebereich werden Funktionen noch feiner unterteilt:

Injektive Funktionen (auch umkehrbare oder eineindeutige Funktionen) ordnen jedes Argument nur einem Funktionswert zu (und als Funktion natürlich jedem Argument nur einen Funktionswert), für eine injektive Funktion f , $f : A \rightarrow B$ gilt zusätzlich: ($(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in f$ und $b_1 = b_2$ so folgt: $a_1 = a_2$).

Ob eine Funktion *surjektiv* ist bezogen auf den Wertebereich, ist ähnlich der Bedeutung von total für den Definitionsbereich: Bei surjektiven Funktionen wird jeder Wert des Wertebereichs auch angenommen, für alle b aus B existiert ein a aus A , sodass $(a, b) \in f$.

Ist eine Funktion injektiv **und** surjektiv so nennen wir sie *bijektiv*.