

Bevor wir im nächsten Kapitel die formale Sprache der Prädikatenlogik kennenlernen, ist es nötig einen Blick darauf zu werfen, warum der Formalismus überhaupt notwendig ist. Wir üben die Ebenen in denen wir uns befinden zu unterscheiden und die ihnen entsprechenden Symbole bzw. Begriffe zu trennen.

1 Die Metaebene

„Meta“ bedeutet soviel wie Mittler oder Mittel. Das beschreibt bereits die Aufgabe der Metasprache: das Vermitteln zwischen verschiedenen spezialisierten Theorien, die Abstraktion der erzielten Ergebnisse einer Theorie und ihre analoge Anwendung in anderen Theorien. Die wichtigste Mittlerrolle spielt sie aber gegenüber dem Alltagsverständnis. Denn ohne eine Möglichkeit, kryptische Symbolfolgen in Bezug zur „Realität“ zu setzen, wäre der ganze Formalismus sinnlos. Wann benutzen wir nun diese Metaebene? Die Antwort ist simpel: nahezu immer.

Dagegen ist der Ansatz, von ihr abzuweichen und formale Sprachen mit axiomenbasierten Theorien zu nutzen, relativ neu. Am Ende des neunzehnten und zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts wurden zahlreiche Gebiete auf axiomatische Grundlage gestellt. Dieser Rausch steigerte sich bis zu den „Principia Mathematica“, in denen Russel und Whitehead versuchten eine allgemeine Grundlage mit möglichst wenigen Axiomen für die gesamte Mathematik zu finden. Die Prädikatenlogik nahm eine zentrale Rolle in diesen Bemühungen ein. Erst als Gödels Unvollständigkeitssätze die Unmöglichkeit eines vollständigen und gleichzeitig konsistenten System zeigten, wenn es nur genügend mächtig war (wofür bereits die Fähigkeit zu zählen und damit verbundene simple Operationen wie Addition und Multiplikation genügen), musste dieser Versuch aufgegeben werden. Für einzelne „kleine“ Theorien eignet sich der Ansatz der formalen Logik dagegen hervorragend. Dabei wird allerdings nie **in** einer formalen Sprache gesprochen, sondern **über** sie. Das kann man mit einem Touristen oder Forscher vergleichen, den Laute und Symbole der Sprache einer fremden Kultur faszinieren, ohne dass er je selbst diese Sprache sprechen wird. Trotzdem kann er Aussagen über ihre Nutzung in *seiner* Sprache machen.

2 Die Metasprache

Was gehört nun also zu unserer, der Metasprache? Wenig überraschend viele der Begriffe aus dem letzten Kapitel, kurzum: die Mengenlehre. Der Vorrat der Zeichen einer Sprache, das *Alphabet*, ist eine Menge, die aus Vereinigung mehrerer Mengen entsteht und wenn wir unserer Sprache eine „Bedeutung“ (eine *Semantik*) geben, dann heißt das für den Logiker: er ordnet Symbolen Mengen zu.

Der zweite Teil ist ungleich verwechslungsanfälliger: über die formale Prädikatenlogik werden wir mit informeller klassischer Logik sprechen. Dabei gibt es meist eins zu eins entsprechende Begriffe respektive Symbole. Bsp.: Wir bekommen es mit Zusammenhängen zu tun, in denen zwei Zustände entweder zusammen oder gar nicht auftreten. In der Metasprache nutzen wir v.a. die Formulierung *gdw.* (genau dann wenn) in solchen Situationen. Die Prädikatenlogik hat das Symbol $\equiv$ für uns bereit. Es hat im formellen Kontext exakt dieselbe Funktion wie *gdw.* in der Metasprache. Trotzdem dürfen wir auf keinen Fall eins an der Position des anderen Nutzen. Warum? In der Metasprache werden wir Aussagen treffen wie „Diese Formel ist in diesem Modell genau dann wahr, wenn jene Formel es im selben Modell nicht ist.“. Dabei kann natürlich das Zeichen $\equiv$ in dieser oder jener Formel enthalten sein. Würden wir nun formale und metasprachliche Symbole wild durcheinander nutzen, wäre der Nutzen des Formalismus dahin. Dieser besteht gerade darin, durch einen festen, eingeschränkten Sprachumfang mit exakten syntaktischen und semantischen Regeln Verwechslungen und Paradoxien auszuweichen, die sich lediglich aus der Reichhaltigkeit (und damit Komplexität) der natürlichen Sprache ergeben.

Einige metasprachliche Ausdrücke

und: Diese Formel ist wahr und jene Formel ist falsch. (gelegentlich abegürzt: u.)

oder: $a \in M$ oder $a \notin N$ (gelegentlich abegürzt: o.)

Wenn, dann: Wenn $a \in M$, dann ist die Formel wahr. (gelegentlich abegürzt: $\Rightarrow$)

gdw.: $a \in B \cap A$ gdw. $b \in \wp(A)$ (selten auch: $\Leftrightarrow$)

Die Pfeilsymbole $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ sind nach Möglichkeit zu vermeiden, weil sie in einigen Quellen auch im formalen Kontext genutzt werden (eher aber einfache und keine doppelten Pfeile) und auch sonst verschieden ausgelegt werden. Dennoch nutzen wir sie, weil besonders $\Rightarrow$ eine übersichtlichere Darstellung bietet als „Wenn, dann“.

3 gaga — eine simple formale Sprache

Zunächst einmal benötigt eine Sprache Zeichen, Laute o.ä. die übermittelt werden können und per se noch keine Bedeutung haben. Das ist bei einer formalen Sprache nicht anders. Hier gehen wir von einer Symbolmenge aus, die wir *Alphabet* nennen.

Das Alphabet von L_{gaga} sein $A = \{g, a\}$.

Unsere Sprache (L ist das bevorzugte Symbol für eine Sprache) hat nun ein Alphabet aus zwei Symbolen: g und a . Diese Symbole kann man nun aneinanderreihen, sodass *Zeichenketten* entstehen. Bsp.: $gaaa$ und ag . Diese kann man dann als Tupel auffassen, $gaaa$ als Quadrupel und ag als geordnetes Paar. D.h. $gaaaa \in A \text{ times } A \times A \times A (= A^4)$ und $ag \in A^2$ (kartesische Produkte, s. Mengen). Betrachtet man alle solchen Zeichenketten, ist das nichts anderes als die Vereinigung aller Mengen von endlichen Tupeln. Diese Menge nennen wir A^* und halten fest:

$$A^* = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4 \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

A^* enthält also alle Tupel mit a und g als Elementen (das große Vereinigungssymbol besagt, dass die Operation „Vereinigen“ mit allen natürlichen Zahlen im Exponent der Menge durchgeführt werden soll). Alle Elemente von A^* nennen wir *Wörter* über dem Alphabet A .

Von Wörtern zur Sprache

Jetzt, da wir alle Wörter mit Symbolen unserer Sprache haben, haben wir damit doch auch unsere Sprache? Wenn das so wäre, dann enthielt die deutsche Sprache das Wort „grieeeyöpl“, was natürlich nicht der Fall ist. Aus all den vorhandenen Wörtern in A^* müssen wir nun die auswählen die zur Sprache gehören. Das kann man mit Hilfe einer formalen Grammatik tun, wir begnügen uns aber mit einigen *rekursiven* Regeln. Rekursiv bedeutet, dass die Regeln Wörter der Sprache in Abhängigkeit zu bereits existierenden Wörtern der Sprache angeben. Damit das klappt, setzen wir in den Basisregeln die Zugehörigkeit von wenigen Wörtern voraus:

Basisregel 1: $gaaa$ ist ein Wort der Sprache L_{gaga} ($gaaa \in L_{gaga}$)

Basisregel 2: $gag \in L_{gaga}$

Nun die rekursiven Regeln:

rekursive Regel 1: Wenn $W \in L_{gaga}$, dann $Wa \in L_{gaga}$

rekursive Regel 2: Wenn $gW \in L_{gaga}$, dann $ggW \in L_{gaga}$

W hat dabei Platzhalterfunktion für ein beliebiges Wort aus A^* . Wie stellt man nun fest, ob Wörter enthalten sind oder nicht? Dazu ein Beispiel:

Uns interessiert das Wort $gaaaa$ (mit $\frac{1}{3}$ mehr a als normales $gaaa$):

$gaaa$ ist nach BR1 in L_{gaga} . Wenn $W = gaaa$ gesetzt wird, gilt nach rR1: $(Wa =)gaaaa \in L_{gaga}$. Es ist also enthalten. Wie steht es mit dem Wort $gaga$ und den Wörtern $agag$ und $gaag$? Wer's sieht kann sich dem nächsten Kapitel zuwenden.