

In diesem Abschnitt definieren, was eine prädikatenlogische Formel (erster Stufe) ist und was nicht. Dabei genügt eine kurze Referenz auf die spätere Bedeutung der Symbole, die wir im nächsten Kapitel klären.

1 „Die“ Prädikatenlogik

Bisher haben wir immer von der, d.h. **einer** Prädikatenlogik gesprochen. Allerdings gibt es nicht eine solche Sprachgruppe, sondern mehrere Variationen und innerhalb derer unendlich viele Sprachen (warum s.u.). Die Klasse von Sprachen die wir nutzen werden sind *sortenfreie prädikatenlogische Sprachen erster Stufe ohne Funktionen und mit Identität*. Das zu wissen ist günstig, falls man nachschlagen will, nicht aber wenn man häufig den Begriff nutzt. Wir merken uns also, dass wir unter *Prädikatenlogik* genau das verstehen.

2 Das Alphabet der Prädikatenlogik

Wie jede formale Sprache hat auch die Prädikatenlogik ihr Alphabet, bestehend aus den folgenden Mengen:

den *Funktoren*, unterteilt in *Junktoren* $\{\wedge, \vee, \supset, \equiv, \sim\}$ und *Quantoren* $\{\forall, \exists\}$

den *Variablenbildern* $\{v, v'\}$

dem *Identitätssymbol* $\{=\}$

den *Klammern* $\{(\,,\,)\}$

den *Individuenkonstanten* (endliche Menge, sprachabhängig)

den *Prädikatkonstanten* (endliche Menge, sprachabhängig)

Die letzten beiden Mengen variieren je nach Sprache. Je nachdem, was wir erreichen wollen, definieren wir uns eine für den Augenblick passende Sprache, die wir aber alle als Klasse mit ihren Eigenschaften untersuchen können, da der einzige Unterschied eben jene beiden Mengen sind.

Prädikatsymbole und Individuensymbole

Die *Prädikatsymbole* sind in einer Logik der ersten Stufe die *Prädikatkonstanten* von oben. Anzahl und Symbole für die Prädikate legen wir also fest, **bevor** wir beginnen, Formeln in der jeweiligen Sprache zu bilden. Bevorzugte Symbole sind $P, Q, R \dots$ (mit und ohne Indizes), dennoch ist jedes erdenkliche Symbol nutzbar. Für jedes Symbol wird seine *Stelligkeit* festgelegt (d.h. die Anzahl von Individuensymbolen, die später mit ihm verwendet werden).

Beispiel: Wollen wir eine Sprache, in der wir Aussagen über die beiden Eigenschaften (d.h. Prädikate) „großzügig sein“ (einstellig) und „bewundern“ (zweistellig) machen können, so nehmen wir zwei Prädikatsymbole P (einstellig) und Q (zweistellig) in unserer Menge der Prädikatsymbole an.

Bei *Individuensymbolen* ist die Lage komplizierter: zum einem gibt es Individuenkonstanten und zum anderen Individuenvariablen. Die ersten definieren wir ebenfalls **vor** allem anderen. Dazu dienen bevorzugt c, d, e (mit Indizes oder ohne).

Beispiel: In unserer Situation von oben wollen wir die beiden Prädikate einigen der Personen Carla, Lisa, Joachim, Sabine und Georg zuschreiben. Damit benötigen wir fünf Individuenkonstanten: c, d, e, f, g, h .

Individuenvariablen besitzen die Form $v, v', v'', v''' \dots$, was erkennen lässt, das wir von ihnen **beliebig viele** zur Verfügung haben. Eine vorherige Festlegung ist ebenfalls nicht nötig, da sie aus den schon zur Sprache gehörenden Variablenbildern formiert werden. Am häufigsten werden wir sie *quantifiziert* einsetzen, d.h. sie hinter ein Quantorensymbol schreiben (s.u.). Allerdings sind Symbole wie v'''''' nicht gerade ein Quell der Lesbarkeit. Aus diesem Grund nutzen wir x, y, z, w, v (mit und ohne Indizes), wohl wissend, dass sie Abkürzungen für **verschiedene** Variablen sind.

Beispiel: In obiger Angelegenheit wollen wir eine Aussage der Form „Jemand ist großzügig.“ treffen.

Eine entsprechende Formel sieht dann so aus: $\exists v!P(v)$, wir schreiben aber meist: $\exists xP(x)$ (Zu lesen als: Es existiert etwas, das großzügig ist.)

3 Prädikatformeln

Prädikatformeln sind die einfachsten aller Formeln und werden durch die Basisregel der prädikatenlogischen Sprache definiert:

Basisregel: Für alle n -stelligen Prädikatsymbole f und n Individuensymbole $i_1 \dots i_n$ ist $f(i_1, \dots, i_n)$ eine *Prädikatformel*, für zwei Individuensymbole i, j ist $i = j$ eine *Prädikatformel*.

Beispiel: $P(c)$, $Q(d, e)$ und $Q(x, y)$ sind Prädikatformeln in der obigen Konstellation (informell gelesen als: Carla ist großzügig, Lisa verehrt Joachim, Person1 verehrt Person2; allein betrachtet scheint die dritte Formel wenig auszusagen. Durch spätere Verknüpfung können aber Bedingungen hinzukommen, die ihren Inhalt konkretisieren. Zum Beispiel könnte durch $x = c$ Person1 an Carla gebunden werden oder wie oben werden eine oder beide Variablen quantifiziert (s.u.))

4 prädikatenlogische Formeln

Mit Hilfe der Funktorsymbole bilden wir komplexere Formeln. Definiert ist dieser Vorgang durch die rekursiven Regeln für *prädikatenlogische Formeln*. Jede Prädikatformel ist auch prädikatenlogische Formel (nicht umgekehrt).

Junktorensymbole

Zunächst wenden wir uns den Junktorensymbolen zu und führen die sie betreffenden rekursiven Regeln ein.:

rekursive Regel 1: Ist A eine prädikatenlogische Formel, so ist $(\sim A)$ ebenfalls eine prädikatenlogische Formel.

rekursive Regel 2: Sind A und B prädikatenlogische Formeln, so ist $(A \wedge B)$ ebenfalls eine prädikatenlogische Formel.

rekursive Regel 3: Sind A und B prädikatenlogische Formeln, so ist $(A \vee B)$ ebenfalls eine prädikatenlogische Formel.

rekursive Regel 4: Sind A und B prädikatenlogische Formeln, so ist $(A \supset B)$ ebenfalls eine prädikatenlogische Formel.

rekursive Regel 5: Sind A und B prädikatenlogische Formeln, so ist $(A \equiv B)$ ebenfalls eine prädikatenlogische Formel.

Dabei sind $\sim$ als „nicht“, $\vee$ als „oder“, $\wedge$ als „und“, $\supset$ als „Subjunktion“ und $\equiv$ als „Bisubjunktion“ zu lesen.

Beispiele: Oben waren $P(c)$ und $Q(d, e)$ prädikatenlogische Formeln. Damit ist $(P(c) \supset Q(d, e))$ auch eine. Ihre Bedeutung wird etwa sein: „Wenn Carla großzügig ist, dann verehrt Lisa Joachim“.

Quantorensymbole

Die verbliebenden rekursiven Regeln sind folgende:

rekursive Regel 6: Ist A eine prädikatenlogische Formel und j eine Individuenvariable, so ist $(\exists jA)$ ebenfalls eine prädikatenlogische Formel.

rekursive Regel 7: Ist A eine prädikatenlogische Formel und j eine Individuenvariable, so ist $(\forall jA)$ ebenfalls eine prädikatenlogische Formel.

Dabei muss j unbedingt Individuenvariable sein, denn über Konstanten zu quantifizieren wäre sinnlos. Aussagen wie „Für alle Lisas gilt: Lisa ist großzügig“ wären die Folge, wobei die Individuenkonstanten

exakt auf **ein** Individuum festgelegt sind (also: Lisa Müller, geboren 12.10.1980 usw. und nicht etwa irgendeine Person des Namens).

Beispiele: $Q(x, y)$ ist eine Prädikatformel, dann ist es auch $\forall x(\exists y Q(x, y))$, was „Jeder hat jemanden, den er verehrt“ bedeutet. Eigenartig muten Formeln wie $\forall x P(c)$ an, die völlig gültige Formeln sind. Wollte man aber überprüfen, ob eine Formel, die quantifizierte Variable überhaupt enthält, müsste man wesentlich kompliziertere Regeln formulieren (die Prädikatenlogik ist eine so genannte kontextfreie Sprache, eine solche Überprüfung würde sie kontextsensitiv machen und damit in der Komplexitätshierarchie der Sprachen hinaufstufen). Solche Formeln schaden nicht und ob sie wahr sind oder nicht, wird dann lediglich die vom Quantor umschlossene Formel entscheiden (hier: $P(c)$).

5 Notation

Einige der Klammern, die nach Definition zu den Formeln gehören werden wir weglassen. Dazu gehören die äußersten einer Formel (wie auch in diesem Kapitel meist geschehen). Zudem definieren wir Vorrangregeln für die Funktoren:

In folgender Reihenfolge binden die Funktoren: Quantoren, $\sim$, $\wedge$ gleichrangig mit $\vee$, $\supset$, $\equiv$.

Beispiel: $\forall x P(x) \supset \exists y P(y) \vee P(y)$ steht für: $(\forall x P(x)) \supset ((\exists y P(y)) \vee P(y))$

gängige Metavariablen

Für einige Konstrukte haben sich bestimmte Metavariablen durchgesetzt:

Sprechen wir über Formeln nutzen wir bevorzugt Großbuchstaben vom Anfang des Alphabets: A, B, C .

Wollen wir ein beliebiges Prädikatsymbol aus unserer Menge beschreiben, so dient uns dazu f . Individuen (ob konstant oder variabel) erhalten i, j als Metasymbol.

Alle Metasymbole dienen uns zur Beschreibung der Struktur von Formeln (wie oben geschehen) und werden niemals selbst in einer Formel erscheinen.