

Schließen mit dem natürlichen Kalkül funktioniert rein syntaktisch d.h. der „Sinn“ (die Semantik) spielt zunächst keine Rolle. Das bedeutet aber auch, dass semantisch äquivalente Formeln nicht einfach gegeneinander ausgetauscht werden können, wenn es dafür keine syntaktische Regel gibt. Zur Veranschaulichung dieses Prinzips dient zuvor eine Sprache ohne jede Semantik.

1 Ableitungen in gaga

Auch in diesem Kapitel nutzen wir L_{gaga} dazu, ein Prinzip der Prädikatenlogik zunächst in einer einfacheren Sprache zu veranschaulichen. Wir setzen die bereits definierten Wörter der Sprache L_{gaga} (s. Kapitel 3 Abschnitt 3) in eine Beziehung die wir *Ableitbarkeit* nennen werden. Dazu definieren wir den Begriff *Ableitung*, eine schrittweise Veränderung der Wörter nach Regeln. Die Regeln wiederum entsprechen folgenden zwei Schemata:

$$\text{Regelschema1: } \frac{ggW}{gW} \quad \text{Regelschema2: } \frac{WagU}{WaaaU}$$

Dabei gilt: $W, U \in A^*$, d.h. W und U sind beliebige Folgen aus a und g . Für die Regelvoraussetzungen (die Wörter **über** dem Regelstrich) gilt, sie müssen Wörter der Sprache L_{gaga} sein. Dass dies die Wörter unter dem Regelstrich dann auch sind, ist Minimalvoraussetzung für eine Regel (Wir wollen schließlich Wörter von L_{gaga} in Beziehung setzen). Durch die Form der Regelschemata ist dies aber gewährleistet. Als eine *Regelinstanz* oder einfach nur *Regel* bezeichnen wir die Regelschemata, nachdem für Voraussetzung und Schluss jeweils Wörter von L_{gaga} eingesetzt wurden.

Beispiel: $\frac{ggaga}{gaga}$ ist eine Regel nach Schema 1.

Nun können wir die Ableitung definieren:

Eine *Ableitung* aus einer Prämissenmenge P , $P \subseteq L_{gaga}$ ist ein Tupel $(W_1, \dots, W_n)$ von Wörtern aus L_{gaga} (für alle k , $1 \leq k \leq n$: $W_k \in L_{gaga}$), sodass für alle k mit $1 \leq k \leq n$ gilt: $W_k \in P$ oder es ex.

$i, i < k$, sodass $\frac{W_i}{W_k}$ eine Regel nach Schema 1 oder 2 ist.

(D.h. alle Wörter der Ableitung sollen entweder Prämissen sein, oder aus einem vorherigen Wort der Ableitung nach Regelschema 1 oder 2 abgeleitet sein.)

Beispiel: Sei $P = \{gggaaa\}$

Dann ist folgende Ableitung möglich:

1. $gggaaa$
2. $ggaaa$
3. $gaaa$

Schließlich heißt ein Wort W von L_{gaga} *ableitbar* aus einer Prämissenmenge P , $P \subseteq L_{gaga}$ (in Symbolen $P \vdash_g W$) gdw. eine Ableitung $(W_1, \dots, W_n)$ aus P existiert, in der W vorkommt (ex. k , $1 \leq k \leq n$: $W = W_k$).

Nach dem Beispiel von oben:

$$\begin{aligned} \{gggaaa\} &\vdash_g ggaaa \\ \{gggaaa\} &\vdash_g gaaa \\ \{gggaaa\} &\vdash_g gggaaa \end{aligned}$$

2 Analog für die Prädikatenlogik

Ebenso kann man prädikatenlogische Formeln über eine Art „Ableitung“ zueinander in Relation setzen. Von dieser Relation erwarten wir allerdings eine ganz spezielle Eigenschaft: sie soll identisch mit der Relation der Folgebeziehung sein, d.h. eine Formelmenge soll zu einer Formel genau dann in Relation stehen, wenn sie aus ihr folgt. Wir bilden also das semantische Folgern mit einer syntaktischen Relation nach. Dafür müssen die Regeln selbst eine gültige Folgerung sein:

$$\text{Wenn } \frac{A_1 \quad \vdots \quad A_i}{B} \text{ Regelinstanz ist, dann } \{A_1, \dots, A_i\} \models B$$

Solche Regeln (und Regelschemata) nennen wir *korrekt*. Die Regeln werden wir schrittweise einführen. Da viele von ihnen etwas Übung (d.h. Anwendung im Beweis) benötigen, definieren wir zuerst den Begriff Beweis (wieder analog zu L_{gaga}).

3 Definiton: Beweis

Da die jeweilige Sprache von der Menge der Konstanten C abhängt, beziehen wir uns auf L_C als prädikatenlogische Sprache.

Ein *Beweis* aus einer Prämissenmenge M , $M \subseteq L_A$ ist ein Tupel $(A_1, \dots, A_n)$ von prädikatenlogischen Formeln (für alle k , $1 \leq k \leq n$: $A_k \in L_A$), sodass für alle k mit $1 \leq k \leq n$ gilt: $A_k \in M$ oder es

$$\text{ex. } i_1 \dots i_j, i_j < k, \text{ sodass } \frac{A_{i_1} \quad \vdots \quad A_{i_j}}{A_k} \text{ eine Regel mit } j \text{ Prämissen des Kalküls des Natürlichen Schließens ist.}$$

4 Alle Regelschemata

Einführung der Konjunktion ($E\wedge$):

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

Beseitigung der Konjunktion ($B\wedge$):

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

Einführung der Disjunktion ($E\vee$):

$$\frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B}$$

Beseitigung der Disjunktion ($B\vee$):

$$\frac{A \supset C \quad B \supset C}{A \vee B \supset C}$$

Einführung der Subjunktion ($E\supset$):

$$\frac{}{A \supset B} \text{ gdw. } P \cup \{A\} \vdash_N B$$

Beseitigung der Subjunktion ($B\supset$):

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

Einführung der Bisubjunktion ($E\equiv$):

$$\frac{A \supset B \quad B \supset A}{A \equiv B}$$

Beseitigung der Bisubjunktion ($B\equiv$):

$$\frac{A \equiv B}{A \supset B} \quad \frac{A \equiv B}{B \supset A}$$

Einführung der Negation ($E\sim$):

$$\frac{}{\sim A} \text{ gdw. } P \cup \{A\} \vdash_N B \text{ und } P \cup \{A\} \vdash_N \sim B$$

Beseitigung der Negation ($B\sim$):

$$\frac{\sim \sim A}{A}$$

Einführung der Identität (E=):

$$\frac{}{\forall i(i = i)} \quad \text{f.a. IV } i$$

Beseitigung der Identität (B=):

$$\frac{i = j \quad A}{A(i/j)} \quad \text{f.a. IV oder IK } i, j$$

Einführung des Allquantors (E $\forall$):

$$\frac{A}{\forall i A} \quad \text{f.a. in } A \text{ nicht freien IV } i$$

Beseitigung des Allquantors (B $\forall$):

$$\frac{\forall i A}{A} \quad \text{f.a. IV } i$$

Einführung des Existenzquantors (E $\exists$):

$$\frac{A}{\exists i A} \quad \text{f.a. in } A \text{ nicht freien IV } i$$

Beseitigung des Existenzquantors (B $\exists$):

$$\frac{\exists i A}{B} \quad \text{gdw. für im Beweis neue IK } j \quad P \quad \cup \quad \{A(i/j)\} \vdash_N \sim B$$

5 Notation: Subbeweis

Einige Regelschemata sind von der Existenz eines zusätzlichen Beweises abhängig, d.h. wenn man eine solche Regeln nutzen will, muss der Beweis zusätzlich geführt werden. Bei mehreren Abhängigkeiten wird das also sehr schnell sehr unübersichtlich. Um dem entgegenzukommen schließen wir den externen Beweis durch eine spezielle Notation ein. Eingerückt, steht er **vor** der Zeile im Hauptbeweis, die seine Conclusio enthält. Dabei stellen wir deren Position im Hauptbeweis der Nummerierung im Subbeweis voran (wollen wir also die dritte Formel schließen, so beginnen alle Zeilen mit 3., obwohl sie vor ihr eingeschoben werden). Formal definieren wir wie folgt:

Ist $T = (A_1, \dots, A_j, \dots, A_n)$, $A_k \in L_C f.a. 1 \leq k \leq n$ ein Beweis aus der Prämissenmenge M , so ist der Beweis $(A_{j.1}, \dots, A_{j.m}) A_k \in L_C f.a. 1 \leq k \leq m$ aus der Menge $M', \{A_k\}_{1 \leq k \leq j} \cup M \subset M'$ ein Subbeweis von T .

Dabei besagt $M', \{A_k\}_{1 \leq k \leq j} \cup M \subset M'$, dass wir alle vorherigen Formeln des Beweises und der ursprünglichen Prämissenmenge verwenden dürfen und zusätzlich neue Prämissen hinzufügen dürfen. Diese werden wir zur besseren Unterscheidung mit *Ann* (für Annahme) kennzeichnen und bei im Hauptbeweis bewiesenen Formeln, die nicht in der ursprünglichen Prämissenmenge sind, statt *Vor* (für den Subbeweis sind sie dies) die Zeilennummer im Hauptbeweis nutzen.

Beispiel:

Sei $M = \{\sim A, B \supset A\}$, dann ist der Beweis

1. $\sim A$ (Vor)
2. $\sim B$ (E $\sim$)

gültig, da aus $M' = M \cup \{B\}$ der Beweis

1. B (Vor)
2. $B \supset A$ (Vor)
3. A (B $\supset$ 1,2)
4. $\sim A$ (Vor)

möglich ist.

Mit Hilfe des Subbeweises fügen wir letzteren in ersten ein:

1. $\sim A$ (Vor)
 - 2.1. B (Vor)
 - 2.2. $B \supset A$ (Vor)
 - 2.3. A (B $\supset$ 1,2)
 - 2.4. $\sim A$ (Vor)
2. $\sim B$ (E $\sim$)

6 Die Regeln im Einzelnen