Repräsentationsfunktion und Tarski-Theorem

Frank Fuhlbrück

8.6.2007

Inhalt

Ziel: Diagonalisierung

Gödels Weg: Substitution

- u.a. Umbenennung von Variablen nötig
- Folge: Veränderung der Gödelnummer nur umständlich arithmetisch beschreibbar.

Ziel: Diagonalisierung

Gödels Weg: Substitution

- u.a. Umbenennung von Variablen nötig
- Folge: Veränderung der Gödelnummer nur umständlich arithmetisch beschreibbar.

Tarskis Weg: Formeln mit einziger freier Variable v_1

- Quantifizierung von v_1 statt Substitution
- deutlich einfacher

Konstruktion von $E[\overline{n}]$

Für jeden Ausdruck E und jede natürliche Zahl n sei:
$E[\overline{n}] := \forall v_1 (v_1 = \overline{n} \supset E)$

Konstruktion von $E[\overline{n}]$

Für jeden Ausdruck E und jede natürliche Zahl n sei:
$E[\overline{n}] := \forall v_1(v_1 = \overline{n} \supset E)$

- $E[\overline{n}]$ ist für alle Ausdrücke definiert!
- Für Formeln F ist $F[\overline{n}]$ wieder eine Formel
- Für Formeln
  $F(v_1)$ mit der einzigen freien Variable v_1 ist $F[\overline{n}]$ äquivalent zu $F(\overline{n})$.

- $E[\overline{n}]$ erfüllt die Rolle von $E(n)$ aus Kapitel 1.

Die Repräsentationsfunktion r

Zur Erinnerung:

Der Ausdruck E_x ist der Ausdruck mit der Gödelnummer x.

Sei $r : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch:

$r(x, y) = z \leftrightarrow E_z = E_x[\overline{y}]$

- d.h. $r(x, y)$ ist Gödelnummer des Ausdrucks $E_x[\overline{y}]$
- (informell wird y in den Ausdruck mit der Gödelnummer x eingesetzt)

Beweis: r ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen x, y, z mit $r(x, y) = z$:

- Der Ausdruck $\forall v_1(v_1 =$ hat die Gödelnummer: $(965265\eta)_{13}$

Beweis: r ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen x, y, z mit $r(x, y) = z$:

- Der Ausdruck $\forall v_1 (v_1 =$ hat die Gödelnummer: $(965265\eta)_{13}$
- Für alle natürlichen y ist $\overline{y}$ der Ausdruck 0^m, wobei m der Ausdruck aus y mal dem Symbol $'$ ist
  Die Gödelnummer von $\overline{y}$ ist daher 1 gefolgt von y mal 0 (zur Basis 13), also $(10_{13})^y$

Beweis: r ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen x, y, z mit $r(x, y) = z$:

- Der Ausdruck $\forall v_1 (v_1 =$ hat die Gödelnummer: $(965265\eta)_{13}$
- Für alle natürlichen y ist $\overline{y}$ der Ausdruck 0^m, wobei m der Ausdruck aus y mal dem Symbol $'$ ist
  Die Gödelnummer von $\overline{y}$ ist daher 1 gefolgt von y mal 0 (zur Basis 13), also $(10_{13})^y$
- Der Ausdruck $\supset$ hat die Gödelnummer 8

Beweis: r ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen x, y, z mit $r(x, y) = z$:

- Der Ausdruck $\forall v_1(v_1 =$ hat die Gödelnummer: $(965265\eta)_{13}$
- Für alle natürlichen y ist $\overline{y}$ der Ausdruck 0^m, wobei m der Ausdruck aus y mal dem Symbol $'$ ist
  Die Gödelnummer von $\overline{y}$ ist daher 1 gefolgt von y mal 0 (zur Basis 13), also $(10_{13})^y$
- Der Ausdruck $\supset$ hat die Gödelnummer 8
- E_x besitzt nach Def. die Nummer x

Beweis: r ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen x, y, z mit $r(x, y) = z$:

- Der Ausdruck $\forall v_1(v_1 =$ hat die Gödelnummer: $(965265\eta)_{13}$
- Für alle natürlichen y ist $\overline{y}$ der Ausdruck 0^m, wobei m der Ausdruck aus y mal dem Symbol $'$ ist
  Die Gödelnummer von $\overline{y}$ ist daher 1 gefolgt von y mal 0 (zur Basis 13), also $(10_{13})^y$
- Der Ausdruck $\supset$ hat die Gödelnummer 8
- E_x besitzt nach Def. die Nummer x
-) hat die Gödelnummer 3

Beweis: r ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen x, y, z mit $r(x, y) = z$:

- Der Ausdruck $\forall v_1(v_1 =$ hat die Gödelnummer: $(965265\eta)_{13}$
- Für alle natürlichen y ist $\overline{y}$ der Ausdruck 0^m, wobei m der Ausdruck aus y mal dem Symbol $'$ ist
  Die Gödelnummer von $\overline{y}$ ist daher 1 gefolgt von y mal 0 (zur Basis 13), also $(10_{13})^y$
- Der Ausdruck $\supset$ hat die Gödelnummer 8
- E_x besitzt nach Def. die Nummer x
-) hat die Gödelnummer 3

Beweis: r ist Arithmetisch

Betrachte die natürlichen Zahlen x, y, z mit $r(x, y) = z$:

- Der Ausdruck $\forall v_1(v_1 =$ hat die Gödelnummer: $(965265\eta)_{13}$
- Für alle natürlichen y ist $\overline{y}$ der Ausdruck 0^m, wobei m der Ausdruck aus y mal dem Symbol $'$ ist
  Die Gödelnummer von $\overline{y}$ ist daher 1 gefolgt von y mal 0 (zur Basis 13), also $(10_{13})^y$
- Der Ausdruck $\supset$ hat die Gödelnummer 8
- E_x besitzt nach Def. die Nummer x
-) hat die Gödelnummer 3

Also besitzt E_z, d.h. der Ausdruck $\forall v_1(v_1 = \overline{y} \supset E_x)$
die Gödelnummer $z = (965265\eta)_{13} * (10_{13})^y * 8 * x * 3$

Da die Konkatenation $*$ zur Basis 13 Arithmetisch ist, wird durch den Ausdruck $z = \overline{(965265\eta)_{13}} * (0^{'''''''''''''})^y * 0^{''''''''} * x * 0^{'''}$ die Relation $r(x, y) = z$ beschrieben

Diagonalisierung

Für alle natürlichen x sei $d(x) = r(x, x)$

Diagonalisierung

Für alle natürlichen x sei $d(x) = r(x, x)$

- d heißt *Diagonal* funktion
- $d(x) = z$ ist Arihtmetisch, da $r(x, x) = z$ Arithmetisch ist
- $d(x)$ ist die Gödelnummer von $E_x[\overline{x}]$

Für alle A, $A \subseteq \mathbb{N}$ sei A^*: $d(n) \in A \leftrightarrow a \in A^*$

- d.h. $A^* = d^{-1}(A)$

Lemma1:

Ist A Arithmetisch, so ist es auch A^*

Lemma1:

Ist A Arithmetisch, so ist es auch A^*

Beweis:

- Da $d(x) = y$ Arithmetisch ist,ex. ein Ausdruck $D(v_1, v_2)$ mit den einzigen freien Variablen v_1 und v_2
  es gilt: $D(\overline{x}, \overline{y})$ ist wahr $\leftrightarrow d(x) = y$

Lemma1:

Ist A Arithmetisch, so ist es auch A^*

Beweis:

- Da $d(x) = y$ Arithmetisch ist,ex. ein Ausdruck $D(v_1, v_2)$ mit den einzigen freien Variablen v_1 und v_2
  es gilt: $D(\overline{x}, \overline{y})$ ist wahr $\leftrightarrow d(x) = y$
- Ist A Arithmetisch, so ex. ein Ausdruck $F(v_1)$ mit v_1 als einziger freier Variable.
  es gilt: $F(\overline{n})$ ist wahr $\leftrightarrow n \in A$

Lemma1:

Ist A Arithmetisch, so ist es auch A^*

Beweis:

- Da $d(x) = y$ Arithmetisch ist,ex. ein Ausdruck $D(v_1, v_2)$ mit den einzigen freien Variablen v_1 und v_2
  es gilt: $D(\overline{x}, \overline{y})$ ist wahr $\leftrightarrow d(x) = y$
- Ist A Arithmetisch, so ex. ein Ausdruck $F(v_1)$ mit v_1 als einziger freier Variable.
  es gilt: $F(\overline{n})$ ist wahr $\leftrightarrow n \in A$
- Betrachtet man die substituierte Formel $F(v_2)$,

Lemma1:

Ist A Arithmetisch, so ist es auch A^*

Beweis:

- Da $d(x) = y$ Arithmetisch ist,ex. ein Ausdruck $D(v_1, v_2)$ mit den einzigen freien Variablen v_1 und v_2
  es gilt: $D(\overline{x}, \overline{y})$ ist wahr $\leftrightarrow d(x) = y$
- Ist A Arithmetisch, so ex. ein Ausdruck $F(v_1)$ mit v_1 als einziger freier Variable.
  es gilt: $F(\overline{n})$ ist wahr $\leftrightarrow n \in A$
- Betrachtet man die substituierte Formel $F(v_2)$,
- dann gilt für den Ausdruck $F^*(v_1) := \exists v_2(D(v_1, v_2) \wedge F(v_2))$:
  $F^*(\overline{x})$ ist wahr $\leftrightarrow$ ex. eine Zahl y: $d(x) = y$ und $y \in A$
  $\leftrightarrow x \in A^*$

Lemma1:

Ist A Arithmetisch, so ist es auch A^*

Beweis:

- Da $d(x) = y$ Arithmetisch ist,ex. ein Ausdruck $D(v_1, v_2)$ mit den einzigen freien Variablen v_1 und v_2
  es gilt: $D(\overline{x}, \overline{y})$ ist wahr $\leftrightarrow d(x) = y$
- Ist A Arithmetisch, so ex. ein Ausdruck $F(v_1)$ mit v_1 als einziger freier Variable.
  es gilt: $F(\overline{n})$ ist wahr $\leftrightarrow n \in A$
- Betrachtet man die substituierte Formel $F(v_2)$,
- dann gilt für den Ausdruck $F^*(v_1) := \exists v_2(D(v_1, v_2) \wedge F(v_2))$:
  $F^*(\overline{x})$ ist wahr $\leftrightarrow$ ex. eine Zahl y: $d(x) = y$ und $y \in A$
  $\leftrightarrow x \in A^*$
- d.h. $F^*(v_1)$ beschreibt A^*, damit ist A^* Arithmetisch, wenn A Arithmetisch ist.

Theorem1:

Ist A Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für A.

- Zur Erinnerung: Ein Satz E_x ist Gödelsatz für A falls gilt:
  E_x ist wahr $\leftrightarrow x \in A$

Theorem1:

Ist A Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für A.

Beweis:

- Sei A Arithmetisch und damit nach Lemma1 auch A^* Arithmetisch.

Theorem1:
Ist A Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für A.

Beweis:

- Sei A Arithmetisch und damit nach Lemma1 auch A^* Arithmetisch.
- Ist $H(v_1)$ die A^* beschreibende Formel und h ihre Gödelnummer,

Theorem1:
Ist A Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für A.

Beweis:

- Sei A Arithmetisch und damit nach Lemma1 auch A^* Arithmetisch.
- Ist $H(v_1)$ die A^* beschreibende Formel und h ihre Gödelnummer,
- so gilt: $H[\overline{h}]$ ist wahr $\leftrightarrow h \in A^* \leftrightarrow d(h) \in A$

Theorem1:

Ist A Arithmetische Menge, so existiert ein Gödelsatz für A.

Beweis:

- Sei A Arithmetisch und damit nach Lemma1 auch A^* Arithmetisch.
- Ist $H(v_1)$ die A^* beschreibende Formel und h ihre Gödelnummer,
- so gilt: $H[\overline{h}]$ ist wahr $\leftrightarrow h \in A^* \leftrightarrow d(h) \in A$
- Da $d(h)$ die Gödelnummer von $H[\overline{h}]$ ist, ist $H[\overline{n}]$ ein Gödelsatz.

Theorem2 - Tarskis Theorem:

Die Menge der Gödelnummern der wahren Arithmetischen Sätze ist nicht Arithmetisch.

- Zur Erinnerung: T ist folgendermaen definiert:
  Für alle Ausdrücke E_x gilt: $x \in T \leftrightarrow E_x$ ist wahrer (Arithmetischer) Satz.

Theorem2 - Tarskis Theorem:

Die Menge der Gödelnummern der wahren Arithmetischen Sätze ist nicht Arithmetisch.

Beweis:

- Ann.: T ist Arithmetisch, dann ist es auch $\widetilde{T}$ (Beschreibt E die Menge T, so beschreibt $\sim E$ die Menge $\widetilde{T}$)

Theorem2 - Tarskis Theorem:

Die Menge der Gödelnummern der wahren Arithmetischen Sätze ist nicht Arithmetisch.

Beweis:

- Ann.: T ist Arithmetisch, dann ist es auch $\widetilde{T}$ (Beschreibt E die Menge T, so beschreibt $\sim E$ die Menge $\widetilde{T}$)
- Dann gibt es einen Gödelsatz E_x für $\widetilde{T}$

Theorem2 - Tarskis Theorem:

Die Menge der Gödelnummern der wahren Arithmetischen Sätze ist nicht Arithmetisch.

Beweis:

- Ann.: T ist Arithmetisch, dann ist es auch $\widetilde{T}$ (Beschreibt E die Menge T, so beschreibt $\sim E$ die Menge $\widetilde{T}$)
- Dann gibt es einen Gödelsatz E_x für $\widetilde{T}$
- so gilt: $x \notin \widetilde{T} \leftrightarrow x \in T \leftrightarrow E_x$ ist wahr $\leftrightarrow x \in \widetilde{T}$ Wid.

Einordnung

- Der Beweis ist von Tarskis Theorem ist direkt über die Bedingungen G_1 und G_2 des Theorems D aus Kapitel 1 möglich.
- Informell besagt er zudem, dass es keine Arithmetische Beschreibung von Wahrheit gibt.